

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»

Энгельсский технологический институт (филиал)

РАССМОТРЕНО

Предметно-цикловой методической
комиссией общеобразовательных, СГ
дисциплин, технологического профиля

протокол № 11 от 25.06.2024

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по СПДО



О.Г. Коваленко

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических занятий учебной дисциплины

ОД.11 Математика

специальность

09.02.07 Информационные системы и программирование

Энгельс 2024

РАССМОТРЕНО

на заседании ПЦМК
общеобразовательных, СГ дисциплин,
технологического профиля

Председатель ПЦМК

 /Т.В. Семенова

Подпись Ф.И.О.

Протокол № 11

от «25» июня 2024 г.

РЕКОМЕНДОВАНО

Ученым Советом ЭТИ (филиал) СГТУ имени
Гагарина Ю.А.

к использованию в учебном процессе

Протокол №9

от «26» июня 2024 г.

Разработчик:

Бабушкина С.Н. – преподаватель ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Рецензенты:

Внутренний: Серебряков А.В. - доцент, преподаватель ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Внешний: Ковалева Т.С., методист высшей квалификационной категории
ГАПОУ СО «Энгельсский политехникум»

Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ разработаны на основе рабочей программы дисциплины ОД.11 Математика (углубленный уровень) в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утверждённого приказом Министерства просвещения РФ от 14.06.2022 г. № 444.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
1. Пояснительная записка	4
2. Указания по выполнению практических работ	8
3. Критерии оценки	35
4. Учебно-методическое и информационное обеспечение практических работ	53
Приложение № 1. Степень	53
Приложение № 2. Корни.	54
Приложение № 3. Логарифмы	55
Приложение № 4. Простейшие тригонометрические уравнения	56
Приложение № 5. Преобразования графиков	58
Приложение № 6. Основы тригонометрии	60
Приложение № 7. Элементы комбинаторики	61
Приложение №8. Производная, применение производной	63
Приложение № 9.Первообразная, интеграл	64
Приложение № 10Многогранники	67
Приложение № 11Тела вращения	68
Приложение № 12Координаты и векторы	79
Приложение № 13 Графики функций	71

1. Пояснительная записка

1.1 Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ по дисциплине ОУД.04 Математика (углубленный уровень), предназначены для реализации Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 15.02.16 Технология машиностроения.

Место учебной дисциплины в структуре ППССЗ: учебная дисциплина входит в общеобразовательный цикл ППССЗ.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен достичь следующие результаты:

П1 умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;

П2 умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов;

П3 умение оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач;

П4 умение свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;

П5 умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать; признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;

П6 умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;

П7 умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения,

неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;

П8 умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;

П9 умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;

П10 умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;

П11 умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел;

П12 умение свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии;

П13 умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;

П14 умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;

П15 умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;

П16 умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;

П17 умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица 2×2 и 3×3 , определитель матрицы, геометрический смысл определителя;

П18 умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социальноэкономического и физического характера;

П19 умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.

Количество часов отведенное на проведение практических занятий - 20 часов.

1.1. Перечень практических работ

Наименование темы	Наименование, № практического занятия	Объем часов	Вид работы	Формируемые результаты освоения
Тема 1.1 Развитие понятие о числе Тема 1.2. Корни, степени и логарифмы	Практическая работа №1. «Развитие понятия о числе. Корни, степени и логарифмы»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 1.4 Основы тригонометрии. Основные понятия	Практическая работа №2.«Основные понятия тригонометрии. Основные тригонометрические тождества».	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 1.5. Преобразование простейших тригонометрических выражений.	Практическая работа №3 «Преобразование простейших тригонометрических выражений. Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 1.6 Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции.	Практическая работа № 4. «Исследование функции. Построение и преобразования графиков функций с использованием их свойств»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 1.7. Уравнения и неравенства	Практическая работа № 5. «Уравнения и системы уравнений. Неравенства. Использование свойств и графиков	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19

	функций при решении уравнений и неравенств»			
Тема 2.1. Последовательности Тема 2.2 Производная	Практическая работа № 6. «Последовательности. Производная»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 2.3. Первообразная и интеграл	Практическая работа № 7. «Первообразная и интеграл. Формула Ньютона-Лейбница»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 3.1. Координаты и векторы Тема 3.2. Прямые и плоскости в пространстве.	Практическая работа № 8. «Координаты и векторы. Прямые и плоскости в пространстве»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 3.3 Многогранники Тема 3.4 Тела и поверхности вращения. Тема 3.5 Измерения в геометрии.	Практическая работа № 9. «Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерения в геометрии»	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Тема 4.1. Элементы комбинаторики. Тема 4.2. Элементы теории вероятностей Тема 4.3. Элементы математической статистики	Практическая работа № 10. «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики».	2	Выполнение задания практической работы	П1-П19
Итого		20		

2. Указания по выполнению практических работ

Практическая работа №1.

«Развитие понятия о числе. Корни, степени и логарифмы»

Цель: способствовать формированию умений выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы;
находить приближенные значения величин и погрешности вычислений; сравнивать числовые выражения;
находить значения корня, степени, логарифма, на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов;
выполнять практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 1 и справочный материал (приложения №1,2,3);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

1. Даны числа:

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 1 - 2i$$

Найдите: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$

Представить данные комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

2. Округлить до целых единиц, вычислить погрешность:

а) 56,7; б) 43,4; в) 73,5;

3. Вычислите: а) $\log_{11} 11 - \log_{11} 44$, б) $\log_{10} 9 + 2\log_{10} 10$; в) $\sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$,

г) $(\frac{1}{2} \cdot 125^{-1})^{-\frac{1}{3}}$, д) $\log_9 2 : \log_{81} 2$,

4. Упростите выражение: а) $\frac{a-b}{a-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{a+\sqrt{b}}$, б) $1,7^{10} \cdot 17^2$, в) $3^{2-10} \cdot 3$
5. Разложите на множители $a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}$.

II вариант:

1. Даны числа:

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 1 - i$$

Найдите: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$

Представить данные комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.

2. Округлить до целых единиц, вычислить погрешность:

а) 84,93; б) 76,5; в) 39,06

3. Вычислите:

а) $\log_1 4 + \log_1 36$, б) $\log_7 7 - \log_7 \frac{7}{1}$, в) $\sqrt[3]{2 \cdot 7} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 49}$,

г) $9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$, д) $\log_3 13 - \log_3 9$,

4. Упростите выражение: а) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6 y^{12}}} - \left(\sqrt[5]{xy^2} \right)^5$,

б) $5^{1+10} \cdot 5$, в) $6^{-2+10} \cdot 6$

5. Разложите на множители $a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}$.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №1;
- 3) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 4) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером
Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Определение логарифма числа.
2. Основное логарифмическое тождество.
3. Свойства логарифмов.
4. Определение натурального, десятичного логарифма.
5. Какие числа называются комплексными?
6. Определение арифметического корня $n^{\text{й}}$ степени из числа, свойства.

7. Определение степени с рациональным показателем, свойства.
8. Определение степени с действительным показателями, свойства.

Практическая работа № 2.
«Основные понятия тригонометрии.
Основные тригонометрические тождества».

Цель: сформировать умение находить значения тригонометрических выражений на основе определения;

выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций;

выполнять практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 2 и справочный материал (приложения № 6);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

Вариант 1

1. Выразите в радианной мере и градусной мере величины углов
 - а) $45^\circ, 120^\circ, 310^\circ, 72^\circ, 270^\circ, 216^\circ$.
 - б) $\pi/3, 2\pi/5, 3\pi/4, -\pi/9, 3,5\pi, 3\pi/2$.
2. Вычислить: $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, если: $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\beta = -5/13$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi/2 < \beta < \pi$.
3. Упростить выражение а) $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ б) $1 - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \cos\alpha$,
 в) $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

4. Вычислить: а) $\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \pi$

5. Доказать тождество: а) $\sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha = 1$, б) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

Вариант 2

1. Выразите в радианной мере и градусной мере величины углов

а) $36^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 60^\circ, 150^\circ, 90^\circ$.

б) $\pi/2, 5\pi/36, \frac{\pi}{6}, 3\pi/5, 5\pi/4, -7\pi/12$.

2. Вычислить: $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, если: $\cos \alpha = 0,6$,

$\sin \beta = -8/17$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < 3\pi/2$.

3. Упростить выражение а) $7 \cos^2 \alpha - 5 + 7 \sin^2 \alpha$; б) $\cos x + \operatorname{tg} x \cdot \sin x$

в) $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

4. Вычислить: а) $\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{3\pi}{2}$

5. Доказать тождество:

а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$, б) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №2;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером
Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Определение синуса, косинуса, тангенса угла.
2. Основное тригонометрическое тождество.
3. Мнемоническое правило для запоминания формул приведения.

4. Знаки значений тригонометрических функций по четвертям
5. Формула перехода из радианной меры угла в градусную.
6. Формула перехода из градусной меры в радианную.
7. Что значит доказать тождество?

Практическая работа № 3

«Преобразование простейших тригонометрических выражений. Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств»

Цель: проверить умения находить значения тригонометрических выражений на основе определения;

выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами тригонометрических функций;

выполнять практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства,

решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 3 и справочный материал (приложения № 4, 6);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант:

1. Упростить: а) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$, б) $\cos 40^\circ \cos 20^\circ$, в) $\sin 15^\circ \cos 75^\circ$, г) $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$,
2. Вычислить

$$\text{а) } \cos 105^\circ - \cos 75^\circ; \text{ б) } \cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$$

3. Известно, что $\cos \alpha = 0,8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

4. Решить уравнение: а) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, б) $\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 в) $\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ г) $\sin 6x = \frac{9}{8}$
 5. Решите неравенства: а) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ г) $\operatorname{tg} 10x > -1$

II вариант:

1. Упростить: а) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$, б) $\sin 70^\circ \sin 10^\circ$, в) $\sin 15^\circ \cos 45^\circ$,
 г) $2 \cos 25^\circ \cos 35^\circ - \cos 10^\circ$,
 2. Вычислить
 а) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$; б) $\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$;
 3. Известно, что $\sin \alpha = 0,6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$,
 4. Решить уравнения: а) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$,
 в) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ г) $\cos 3x = -\frac{5}{3}$
 5. Решите неравенства: а) $\sin 3x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $\cos(\frac{x}{2}) \leq -\frac{1}{2}$ г) $\operatorname{ctg} 10x < 1$

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №3;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
 доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Какие уравнения называются простейшими тригонометрическими?
2. Дайте определения арксинуса, арккосинуса арктангенса и арккотангенса числа a

3. Формулы, с помощью которых решают простейшие тригонометрические уравнения.

Практическая работа № 4

«Исследование функции. Построение и преобразования графиков функций с использованием их свойств»

Цель: проверить умения вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
описывать с помощью функций различные зависимости, представлять их графически, интерпретировать графики.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 4 и справочный материал (приложения № 4, 13);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант:

1. Построить графики функций $y = x^{1/4}$, $y = x^{-2,5}$. Исследовать свойства функций по графику.
2. В одной системе координат построить графики (цветными карандашами) следующих функций:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x; \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

3. Определите, является функция четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной:

$$1) y = x^3 + \frac{2}{x^2} \quad 2) y = -x^3 + \frac{1}{x} \quad 3) y = x^2 - 2x + 5 \quad 4) y = x^4 - 22$$

4. Найти точки пересечения с осями координат и построить графики функций:

$$а) y = \sin x + 1; \quad б) y = 2\cos x; \quad в) y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

5. Вычислить:

$$а) 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arccotg}(-1);$$

$$б) \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \arcsin 1;$$

$$в) 3 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos 1,$$

$$г) \arcsin \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 3 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$д) \cos\left(\arccos \frac{1}{2}\right).$$

II вариант:

1. Построить графики функций $y = x^{1,5}$, $y = x^{-4/5}$. Исследовать свойства функций по графику.
2. В одной системе координат построить графики (цветными карандашами) следующих функций:

$$y = \log_3 x; \quad y = 3^x$$

3. Определите, является функция четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной:

$$1) y = x^4 - 4x + 5, \quad 2) y = x^4 - \frac{x^2}{2}, \quad 3) y = x^2 - 2x + 5, \quad 4) y = x^6 + 55$$

4. Найти точки пересечения с осями координат и построить графики функций:

$$а) y = \cos x - 1; \quad б) y = \frac{1}{2} \sin x; \quad в) y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

5. Вычислить:

$$а) \arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$б) \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} & \text{в) } 2\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - 4\operatorname{arccotg} 1, \\ \text{г) } & \operatorname{arccotg} \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \right) - \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + 0,83 \arccos 1, \\ & \text{д) } \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №4;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Что такое функциональная зависимость?
2. Какие существуют величины в функциональной зависимости?
3. Приведите примеры функциональных зависимостей в реальных явлениях.
4. Перечислите свойства функций.
5. Перечислите основные этапы исследования функции.

Практическая работа № 5

«Уравнения и системы уравнений. Неравенства. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств»

Цель: проверить умения решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;

использовать графический метод решения уравнений и неравенств; изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы №5 и справочный материал (приложение № 4);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант

1) Решить неравенства:

a) $x(x+3)+2x \leq (x+1)^2+1.$

b) $3^{x^2-4} > 1$

c) $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$

d) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Решить уравнения:

a) $\sqrt{x+1} = x-5$

b) $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$

c) $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$

d) $\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$

3) Изобразить на плоскости решение системы неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} y \geq x \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$$

4) Решите системы уравнений:

a) $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

II вариант

1) Решить неравенства:

a) $(x^2+1)^2-3x^2 > (x^2-x)(x^2+x)$.

b) $2^{-x^2+2x} < 4$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x+15) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-1) - 2$

d) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

2) Решить уравнения:

a) $\sqrt{2x+3} = 6-x$

b) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

c) $2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^5$

d) $3\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

3) Изобразить на плоскости решение системы неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} y \geq x \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

4) Решите системы уравнений:

a) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ 2x + \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №5;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет

Практическая работа № 6 «Последовательности. Производная»

Цель: проверить умения находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;

решать прикладные задачи, в том числе социально-экономические и физические, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения;

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 6 и справочный материал (приложение № 8);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант:

1. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 2x - 8}{2x^2 - x - 6}, \text{ при } a = -1; a = 2; a = \infty$$

2. Найти производную функции:

a) $y = \frac{2x-3}{x+1}$

b) $y = \sqrt{x^4}$

c) $y = \frac{2}{x^4}$

d) $y = 2x^2 - 7 \ln x + 4 \log_4 x$

e) $y = 5 \sin x \cdot 4^x$

f) $y = 5^{3x-4}$

3. Вычислить скорость и ускорение точки в момент времени $t = 4$ сек

$$S = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 3t - 4, (\text{м})$$

4. Составить уравнение касательной и нормали к параболе в точке с абсциссой:

$$y = 2x^2 - 12x + 20, x_0 = 4$$

- а) Исследуйте функцию и постройте ее график

$$y = 2x^4 - 9x^2 + 7$$

- б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

$$y = -\frac{8}{x}, \left[\frac{1}{4}; 8\right]$$

II вариант:

1. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 5x - 12}{5x^2 - 21x + 4}, \text{ где } a = -1; a = 4; a = \infty$$

2. Найдите производную функции

а) $y = \frac{2x+1}{x-3}$

б) $y = \frac{2}{x^5}$

в) $y = 2^x - \log_7 x$

г) $y = 6x^2 - 6 \ln x + 3 \log_2 x$

д) $y = 4 \cos x \cdot 9^x$

е) $y = \sin(4x-7)$

3. Вычислить скорость и ускорение точки в момент времени $t = 5$ сек

$$S = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + 2t + 3, (\text{м})$$

4. Составить уравнение касательной и нормали к параболе в точке с абсциссой:

$$y = x^2 + 2x - 8, x_0 = 2$$

5. Исследуйте функцию и постройте ее график

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

$$y = 2x^2 - 8x + 6, [-1; 4]$$

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №6;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции в точке x_0 ?
3. Какая функция называется непрерывной в точке?
4. В каком случае в данной точке функция терпит разрыв?
5. Дайте определение производной функции в точке.
6. Какие существуют обозначения для производной функции $y=f(x)$?
7. Сформулируйте необходимое условие существования производной функции в точке?
8. Какую функцию называют дифференцируемой в точке?
9. Что называется дифференцированием?
10. Назовите по порядку все операции, которые следует произвести при вычислении производной по определению.
11. Таблицу производных
12. Правила дифференцирования
13. Как находится производная сложной функции $h(x) = g(f(x))$?
14. Что характеризует производная функции в точке?

Практическая работа № 7.

«Первообразная и интеграл. Формула Ньютона- Лейбница»

Цель: проверить умения применения правил вычисления первообразной и теоремы Ньютона— Лейбница, вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла; решение задач на связь первообразной и ее производной, вычисление первообразной для данной функции.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 7 и справочный материал (приложение №9);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.

5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант

1. Вычислите интеграл:

$$1) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$2) \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} - 3x^2 \right) dx.$$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной

а) параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$ и $x = 3$,

б) графиками функций $y = 6 - x^2$ и $y = x + 4$.

3. Найдите первообразную функции $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$, график которой проходит через точку A (1; 6).

4. Материальная точка движется прямолинейно, ее ускорение меняется по закону $a(t) = 4 - 6t$ (м/с²). Известно, что скорость точки в момент времени $t = 2$ с составляла $v = 1$ м/с, а пройденный точкой путь составлял $s = 3$ м. Составить закон движение материальной точки.

4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс (Ox) фигуры, заключённой между параболой $y = 3 - x^2$ и $y = x^2 + 1$.

II вариант

1. Вычислите интеграл:

$$1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$2) \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной

а) параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$ и $x = 2$,

б) графиками функций $y = 5 - x^2$ и $y = 3 - x$

3. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$, график которой проходит через точку M (1; -3).

4. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 12t + 4$. Найдите закон движения точки, если в момент времени $t = 1$ с пройденный путь составил 12 м.

5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс (Ox) фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 4$.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №7;

- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется первообразной функцией для данной?
2. Что такое неопределённый интеграл от функции?
3. Сформулировать определение определенного интеграла.
4. Сформулируйте свойства определенного интеграла
5. Сформулировать определение криволинейной трапеции. Записать формулу Ньютона–Лейбница.
6. Сформулировать свойства неопределенного интеграла.
7. Сформулируйте основное свойство первообразной
8. Таблица интегралов
9. Геометрический смысл интеграла
10. Сформулировать три правила нахождения первообразной.

Практическая работа № 8

«Координаты и векторы. Прямые и плоскости в пространстве»

Цель: проверить умения решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;

2. Им выдаются задания практической работы № 8 и справочный материал (приложение № 12);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант:

1. Точка А — середина отрезка МК. Найдите координаты точки А и длину отрезка МК, если М (5; -2; 1), К (3; 4; -3).
2. Точки А и В симметричны относительно точки С. Найдите координаты точки В, если А (-3; 5; -7), С (6; 2; -1).
3. Даны векторы $\vec{a}(3; -2; -1)$ и $\vec{b}(1; 2; 4)$. Найдите:
 - 1) координаты вектора $\vec{m} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - 2) косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} .
4. Даны векторы $\vec{a}(2; -6; 8)$ и $\vec{b}(-1; k; -4)$. При каком значении k векторы \vec{a} и \vec{b} :
 - 1) коллинеарны;
 - 2) перпендикулярны?
5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку А и перпендикулярной прямой АВ, если А (1; 2; -3), В (4; 8; -6).
6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали $C_1 D$ его грани отметили точку М так, что $DM : MC_1 = 5 : 3$.
 - 1) Выразите вектор \overrightarrow{AM} через векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} и $\overrightarrow{AA_1}$.
 - 2) Найдите модуль вектора \overrightarrow{AM} .

II вариант:

1. Точка М — середина отрезка АВ. Найдите координаты точки М и длину отрезка АВ, если А (6; -5; 2), В (-4; 3; 10).
2. Точки М и К симметричны относительно точки D. Найдите координаты точки К, если М (4; -6; 3), D (-2; 1; 5).
3. Даны векторы $\vec{m}(2; -1; 3)$ и $\vec{n}(-1; 2; 5)$. Найдите:
 - 1) координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$
 - 2) косинус угла между векторами \vec{m} и \vec{n}
4. Даны векторы $\vec{m}(5; -4; 6)$ и $\vec{n}(15; -12; p)$. При каком значении p векторы \vec{m} и \vec{n}
 - 1) коллинеарны;
 - 2) перпендикулярны?

5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку В и перпендикулярной прямой ВС, если В (3; -2; 4), С (-2; 8; 19).
6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали AD_1 его грани отметили точку Е так, что $AE : ED_1 = 2 : 7$.
 - 1) Выразите вектор \overrightarrow{BE} через векторы \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.
 - 2) Найдите модуль вектора \overrightarrow{BE} .

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №8;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Что называют декартовой прямоугольной системой координат в пространстве?
2. Каковы координаты суммы (разности) двух векторов?
3. Каковы координаты произведения вектора на число?
4. Сформулируйте признак коллинеарности двух векторов в координатах?
5. Сформулируйте признак компланарности трех векторов в координатах?
6. Каковы координаты суммы нескольких векторов?
7. Чему равно скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами?
8. Каково условие перпендикулярности двух векторов в координатах?
9. Какова формула нахождения длины вектора, заданного своими координатами?
10. Какова формула нахождения косинуса угла между векторами, заданными своими координатами?
11. Что называют координатами точки М в системе координат $Oxyz$?
12. Формула расстояния между точками в координатах.
13. Запишите уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Практическая работа № 9

«Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерения в геометрии»

Цель: проверить умения изобразить основные многогранники и круглые тела; выполнить чертежи по условиям задач;

решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);

вычислять объемы и площади поверхностей пространственных тел при решении практических задач, использовать при необходимости справочники и вычислительные устройства

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 9 и справочный материал (приложения № 10, 11);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант

4. Основание прямой треугольной призмы – прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 10 см. Высота призмы равна 8 см. Найдите объём призмы.
5. Найдите объём правильной усечённой треугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 6 см и 8 см, а высота – 9 см.
6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
7. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 18.
8. Объём конуса равен 112. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.
6. Составьте уравнение сферы с центром в точке $A(6; -2; 7)$, проходящей через точку $B(8; -1; 5)$.

II вариант

1. Основание прямой четырёхугольной призмы – параллелограмм со сторонами 4 см и $5\sqrt{2}$ см и углом 45° между ними. Высота призмы равна 6 см. Найдите объём призмы.
2. Найдите объём правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 4 см и 7 см, а высота – 12 см.
3. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 3 см, а угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 45° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
4. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 14.
5. Объём конуса равен 120. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.
6. Составьте уравнение сферы с центром в точке $C(-3; 1; 9)$, проходящей через точку $D(1; 5; 8)$.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №9;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение многогранника, перечислите основные его элементы. Приведите 3-4 примера многогранников.
2. В чем состоит отличие выпуклого многогранника от невыпуклого? Ответ проиллюстрируйте.
3. Сформулируйте определение призмы, перечислите основные ее элементы. Выполните чертеж.
4. В чем состоит отличие прямой призмы от наклонной. Выполните чертеж прямой и наклонной призмы.

5. Сформулируйте пространственную теорему Пифагора и проиллюстрируйте ее.
6. Запишите известные вам формулы нахождения площадей прямой и наклонной призм.
7. Сформулируйте определение пирамиды, перечислите основные ее элементы. Выполните чертеж, как вычислить площадь полной поверхности и площадь боковой поверхности пирамиды.
8. Какая пирамида называется правильной? Выполните чертеж правильной четырехугольной пирамид.
9. Сформулируйте определение усеченной пирамиды, перечислите основные ее элементы. Выполните чертеж.
10. Перечислите основные элементы симметрии. Выполните соответствующие чертежи.
11. Определение цилиндра. Чертеж (сделать чертеж с буквенными обозначениями) По чертежу показать и назвать основные элементы цилиндра
12. Как получить цилиндр вращением? Сделайте чертеж. Назвать и показать сечения цилиндра плоскостями.
13. Чему равна площадь полной поверхности цилиндра? Чему равна площадь боковой поверхности цилиндра?
14. Определение конуса. Чертеж (сделать чертеж с буквенными обозначениями). По чертежу показать и назвать основные элементы конуса
15. Как получить конус вращением? Сделайте чертеж. Назвать и показать сечение конуса разными плоскостями
16. Как можно получить усеченный конус? Что называется основанием усеченного конуса? Что называется высотой усеченного конуса?
17. Чему равна площадь полной поверхности конуса? Чему равна площадь боковой поверхности конуса?
18. Определение шара, сферы. Чертеж (сделать чертеж с буквенными обозначениями) По чертежу показать и назвать основные элементы шара
19. Когда в сечении сферы плоскостью получается окружность?
20. Когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку? А когда не имеют общих точек?
21. Чему равна площадь сферы радиуса R ?
22. Уравнение сферы в прямоугольной системе координат

Практическая работа № 10

«Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики».

Цель: проверить умения решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;

вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

анализировать реальные числовые данные, представлять их в виде диаграмм, графиков.

Задание: решить задачи согласно своему варианту.

Порядок выполнения задания

1. Обучающиеся разбиваются на два варианта;
2. Им выдаются задания практической работы № 10 и справочный материал (приложение № 7);
3. Обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ в клетку.
4. Работы оформляются чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
5. Условия задач должны быть переписаны полностью
6. Решение сопровождается краткими пояснениями, с указанием используемых формул.
7. Все рисунки и схемы выполняются карандашом с помощью линейки.

Варианты задания:

I вариант:

- 1) Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 4, 9, 7, если: а) цифры в числе не повторяются; б) цифры могут повторяться.
- 2) Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?
- 3) Среди 170 деталей, изготовленных на станке, оказалось 8 деталей, не отвечающих стандарту. Найдите вероятность выбора детали, не отвечающей стандарту.
- 4) На 10 карточках написаны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две из них вынимаются наугад и укладываются в порядке появления, затем читается полученное число. Найдите вероятность того, что число будет нечетным.
- 5) Найти среднюю оценку учащегося по математике, если за истекший период он получил: 3,4,4,5,3,2,4,3.
- 6) На уроке физкультуры 14 учащихся прыгали в высоту, а преподаватель записывал их результаты. Получился такой ряд данных (в см): 125, 110, 130, 125, 120, 130, 140, 125, 110, 130, 120, 125, 120, 125. Найти медиану, размах и моду измерения.
- 7) Приводятся данные о распределении 25 работников одного из предприятий по тарифным разрядам: 4; 2; 4; 6; 5; 6; 4; 1; 3; 1; 2; 5; 2; 6; 3; 1; 2; 3; 4; 5; 4; 6; 2; 3;

4. Построить дискретный вариационный ряд и изобразить его графически в виде полигона распределения.

II вариант:

- 1) Сколько можно составить четырехзначных чисел из цифр 1, 5, 8, 3, если:
а) цифры в числе не повторяются; б) цифры могут повторяться.
- 2) Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.
- 3) Пусть имеется 80 деталей, среди которых 60 исправных, а 20 бракованных. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется исправной.
- 4) В урне 4 белых и 7 белых шаров. Из урны взяли 2 шара. Какова вероятность, что оба шара белые?
- 5) Найти среднюю оценку учащегося по математике, если за истекший период он получил: 3,2,4,4,3,4,3,4,4,4,5.
- 6) На уроке физкультуры 16 учащихся прыгали в длину, а преподаватель записывал их результаты. Получился такой ряд данных (в см): 185, 190, 210, 220, 205, 190, 180, 215, 195, 200, 180, 190, 185, 170, 220, 195. Найти медиану, размах и моду измерения.
- 7) Измерения напряжения электросети (в вольтах) дали следующие результаты: 210, 198, 215, 212 194 213 199 191, 205, 211, 189, 206, 204, 205, 201, 194, 190, 200, 202, 196, 200, 216, 214, 200, 196, 210, 206, 200, 215, 204. Построить гистограмму относительных частот выборки и гистограмму частот выборки.

Условия выполнения задания:

- 1) задание выполняется в учебном кабинете математики;
- 2) обучающимся предоставляется задание практической работы №10;
- 3) обучающиеся выполняют задания в тетрадях для практических работ;
- 4) время, отводимое на работу - 90 мин;
- 5) максимальный балл за задание - 5 баллов.

Материально-техническое обеспечение:

специализированная мебель (столы, стулья по количеству обучающихся);
доска для написания маркером.

Технические средства обучения:

автоматизированное рабочее место преподавателя, оборудованное компьютером

Учебно-наглядные пособия (раздаточный материал)

Информационно-коммуникационные средства

Компьютер преподавателя имеет доступ к электронно-библиотечной системе book.ru, Юрайт, выход в глобальную сеть Интернет.

Контрольные вопросы:

1. Что изучает комбинаторика?

2. Сформулируйте правила суммы и произведения.
3. Запишите формулы для числа различных размещений A_n^k , перестановок P_n , число сочетаний C_n^k из n элементов по k .
4. Что понимается под элементарным событием?
5. Дайте определения достоверных, невозможных и случайных событий; элементарного исхода; событий несовместных, равновероятных, зависимых, независимых.
6. Введите понятие вероятности события.
7. Сформулируйте определение классической вероятности.
8. Какими простейшими свойствами обладает вероятность?

3. Критерии оценки

Практическая работа № 1

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов.

Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1

	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 2

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов.

Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8

	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 3

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов.

Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3

	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5

	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 4

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	

	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 5

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1,5
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1,5
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	1
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1,5
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1,5
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка	1

	вычислительного характера,	
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 6

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой. Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	0,5
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	0,5
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,3
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,2

	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	0,5
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	0,5
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,3
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,2
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
6	Задание 6	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие	0

	решения	
	Итого	5

Практическая работа № 7

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное	1

	решение, получен верный ответ	
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 8

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой. Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию (геометрия)	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в	0,8

	условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	0,8
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0

3	Задание 3	1
	<p>найден верный способ решения;</p> <p>приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения;</p> <p>верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов;</p> <p>верно выполнены все преобразования и вычисления;</p> <p>получен верный ответ</p>	1
	<p>найден верный способ решения;</p> <p>приведена верная последовательность всех шагов решения;</p> <p>допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов;</p> <p>верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи;</p> <p>допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения</p>	0,8
	<p>ход решения верный;</p> <p>решение, возможно, не завершено;</p> <p>допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов;</p> <p>отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности;</p> <p>допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения;</p> <p>в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ</p>	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	
	<p>найден верный способ решения;</p> <p>приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения;</p> <p>верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов;</p> <p>верно выполнены все преобразования и вычисления;</p> <p>получен верный ответ</p>	1
	<p>найден верный способ решения;</p> <p>приведена верная последовательность всех шагов решения;</p> <p>допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов;</p> <p>верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную</p>	0,8

	роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	0,8
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 9

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой. Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию (геометрия)	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	0,8
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1
	найден верный способ решения;	1

	<p>приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ</p>	
	<p>найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения</p>	0,8
	<p>ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ</p>	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	<p>найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ</p>	1
	<p>найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения</p>	0,8
	<p>ход решения верный; решение, возможно, не завершено;</p>	0,5

	допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления; получен верный ответ	1
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	0,8
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; верно обоснованы все ключевые моменты выбранного способа решения; верно отмечены на чертеже свойства всех представленных в условии фигур и их элементов; верно выполнены все преобразования и вычисления;	1

	получен верный ответ	
	найден верный способ решения; приведена верная последовательность всех шагов решения; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; верно отмечены на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов, которые играют важную роль в решении задачи; допущена одна негрубая вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения	0,8
	ход решения верный; решение, возможно, не завершено; допущены отсутствия и (или) негрубые ошибки в обоснованиях ключевых моментов; отмеченные на чертеже свойства представленных в условии фигур и их элементов имеют неточности; допущены негрубые ошибки в вычислениях и в преобразованиях, не влияющие на правильность хода решения; в результате этих ошибок может быть получен неверный ответ	0,5
	неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Практическая работа № 10

Максимальное количество баллов за выполнение задания «Практическая работа» – 5 баллов. Оценивание выполнения практического задания осуществляется в соответствии со следующей методикой.

Методика: в соответствии с каждым критерием баллы начисляются, если студент дал правильный ответ, или совершил верное действие. В противном случае баллы не начисляются. Оценка за выполненное задание (задачу) складывается из суммы начисленных баллов.

	Критерии оценки к практическому заданию	Баллы за критерии оценки
1	2	3
	Задания	Максимальный балл – 5 баллов
1	Задание 1	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
2	Задание 2	1

	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
3	Задание 3	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
4	Задание 4	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
5	Задание 5	1
	Ход решения верный, приведено верное обоснованное решение, получен верный ответ	1
	Ход решения верный, но допущена одна ошибка вычислительного характера,	0,8
	Решение начато логически верно, допущена вычислительная ошибка; или решение не доведено до конца, ответ отсутствует	0,5
	Неверное решение, неверный ответ или отсутствие решения	0
	ИТОГО:	5

Перевод пяти бальной шкалы учета результатов в пяти бальную оценочную шкалу:

Оценка	Количество баллов, набранных за выполнение теоретического и практического задания, средний балл по итогам аттестации
Оценка 5 «отлично»	4,6-5
Оценка 4 «хорошо»	3,6-4,5
Оценка 3 «удовлетворительно»	3-3,5
Оценка 2 «неудовлетворительно»	$\leq 2,9$

3. Учебно-методическое и информационное обеспечение лабораторных работ, практических работ

1. Башмаков, М. И. Математика: учебник /М.И. Башмаков.- 2-е изд., стер.- М.: КНОРУС, 2019.- 394с.- (СПО) <https://www.book.ru>
2. Богомолов, Н.В., Самойленко, П.И. Математика: учебник для СПО /Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко.- М.: Юрайт, 2019.- 401с.- (Профессиональное образование) <https://urait.ru>
3. Богомолов, Н.В. Практические задания по математике. В 2-х ч. Ч.1: учеб.пособие для СПО /Н.В. Богомолов.- 11-е изд., перераб. и доп.- М.: Юрайт, 2019.- 326с.- (Профессиональное образование). <https://urait.ru>
4. Богомолов, Н.В. Практические задания по математике. В 2-х ч. Ч.2: учеб.пособие для СПО /Н.В. Богомолов.- 11-е изд., перераб. и доп.- М.: Юрайт, 2019.- 251с.- (Профессиональное образование). <https://urait.ru>
5. Гусев, В. А. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 280 с. — (Профессиональное образование) <https://urait.ru>

Дополнительные учебные издания

6. Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 240 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09525-8. Гриф УМО СПО <https://urait.ru>
7. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. Гриф УМО СПО <https://urait.ru>
8. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 320 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09135-9. Гриф УМО СПО <https://urait.ru>
9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия для профессий и специальностей социально-экономического профиля/ Гусев В.А. , Григорьев С.Г. , Иволгина С.В. - 2-е изд. стер.— М.: Академия, 2018.- 416 с. <https://academia-library.ru>

Интернет-ресурсы

10. . www.fcior.edu.ru (Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР)).
11. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов)
12. [www. Ucheba. com](http://www.Ucheba.com) (Образовательный портал «Учеба»: «Уроки» ([www. uroki. ru](http://www.uroki.ru)))

Степень

Краткий справочный материал по теме	Примеры решения типовых заданий
$a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$ <u>Читаем:</u> a^n – « a в n -ой степени»	$a \cdot a = a^2$ (читаем: a во 2-ой степени) $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$ (читаем: x в 4-ой степени) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ (читаем: 3 в 3-ей степени)
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	1) $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$ 2) $4^2 \cdot 4^{-3} = 4^{2+(-3)} = 4^{-1}$ 3) $5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{3}}$ 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	1) $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$ 2) $3^{-2} : 3^{-5} = 3^{-2-5} = 3^{-7}$ 3) $4^{\frac{5}{6}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}} = 4^{\frac{4}{6}} = 4^{\frac{2}{3}}$ 4) $\left(2^{-4}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(2^{-4}\right)^2 = \left(2^{-4}\right)^2 = \left(2^{-4}\right)^2 = \frac{2^4}{3^2}$
$(a^n)^m = a^{nm}$	1) $(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$ 2) $(3^5)^3 = 3^{5 \cdot 3} = 3^{15}$ 3) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}} = 4^{\frac{5}{6}}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $b \neq 0$	1) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$ 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$	1) $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ 2) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ 3) $a^4 = \frac{1}{a^{-4}}$ 4) $5^2 = \frac{1}{5^{-2}}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a \neq 0, b \neq 0$	1) $\left(\frac{b}{c}\right)^{-3} = \left(\frac{c}{b}\right)^3$ 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$
$a^0 = 1, a \neq 0$ 0^0 – не существует!	1) $c^0 = 1, c \neq 0$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

Корни

Краткий справочный материал по теме	Примеры решения типовых заданий
$\sqrt[n]{a}$ <u>Читаем:</u> «Корень n -ой степени из числа a »	$\sqrt[3]{2}$ - читаем: корень 3-ей степени из 2-х; $\sqrt[5]{c}$ - читаем: корень 5-ой степени из c
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$ $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$ $\sqrt[3]{25} = \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$ $\sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$ $\sqrt[5]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}} \Leftrightarrow (\frac{1}{\sqrt[5]{3}})^5 = \frac{1}{3}$
$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[5]{-27} \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{-27 \cdot 9} = \sqrt[5]{-243} = -3$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, a \neq 0$	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}, k > 0$	$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \cdot 2]{4^2} = \sqrt[6]{16} = 2$
$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ Если $k \leq 0$, то $a \neq 0$	$\sqrt[3]{64^2} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16$ $\sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{n/m}, m > 0$	$\sqrt[4]{2^8} = 2^{8/4} = 2^2 = 4$ $\sqrt[3]{6^3} = 6^{3/3} = 6$

Логарифмы

Краткий справочный материал	Примеры решения типовых заданий
<p>по теме</p> $\log_a b = c$ <p><u>Читаем:</u> логарифм числа b по основанию a равен c</p>	$\log_3 9 = 2$ <p>Читаем: логарифм 9 по основанию 3 равен 2</p>
$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ $a > 0, b > 0, a \neq 1$	$\log_2 8 = 3, \text{ т. к. } 2^3 = 8$ $\log_5 25 = 2, \text{ т. к. } 5^2 = 25$ $\log_3 \frac{1}{8} = -4, \text{ т. к. } 3^{-4} = \frac{1}{8}$
${}_a \log_a b = b$ $a > 0, b > 0, a \neq 1$	${}_c \log_c 8 = 8; \quad {}_5 \log_5 9 = 9$
$\log_a 1 = 0$ $a > 0$	$\log_3 1 = 0, \text{ т. к. } 3^0 = 1$ $\log_{\frac{3}{7}} 1 = 0, \text{ т. к. } \left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$
$\log_a a = 1$ $a > 0$	$\log_5 5 = 1, \text{ т. к. } 5^1 = 5$
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $a > 0, x > 0, y > 0, a \neq 1$	$\log_3 (9 \cdot 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$ $\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 (8 \cdot 2) = \log_4 16 = 2$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $a > 0, x > 0, y > 0, a \neq 1$	$\log_3 \frac{9}{27} = \log_3 9 - \log_3 27 = 2 - 3 = -1$ $\log_4 8 - \log_4 2 = \log_4 \frac{8}{2} = \log_4 4 = 1$
$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ $a > 0, x > 0, a \neq 1$	$\log_7 343^4 = 4 \cdot \log_7 343 = 4 \cdot 3 = 12$ $4 \cdot \log_4 2^4 = \log_4 16 = 2$
$\log_{10} b = \lg b$ <p>десятичный логарифм</p>	$\log_{10} 7 = \lg 7$

Простейшие тригонометрические уравнения

Краткий справочный материал	Примеры решения уравнений
$\sin x = a, a \leq 1$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ Частные случаи: 1) $\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $\sin x = 0$ $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 3) $\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Решите уравнения : 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,$ <u>Ответ:</u> $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $2\sin x - 1 = 0$ $2\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$ <u>Ответ:</u> $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 3) $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} = 0$ $\sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\sin x = 1$ – частный случай! <u>Ответ:</u> $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a, a \leq 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ Частные случаи: 1) $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 3) $\cos x = 1$ $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Решите уравнения : 1) $\cos x = \frac{1}{2}$ $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ <u>Ответ:</u> $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ $2\cos x = \sqrt{2}$ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ <u>Ответ:</u> $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ 3) $\sqrt{5}\cos x - \sqrt{5} = 0$ $\sqrt{5}\cos x = \sqrt{5}$ $\cos x = 1$ – частный случай! <u>Ответ:</u> $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, -\pi/2 < a < \pi/2$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	Решите уравнения: 1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ <u>Ответ:</u> $x = \pi/3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ 2) $2\operatorname{tg} x - 2 = 0$ $2\operatorname{tg} x = 2$ $\operatorname{tg} x = 2/2$ $\operatorname{tg} x = 1$ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$ <u>Ответ:</u> $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Таблица значений обратных тригонометрических функций:

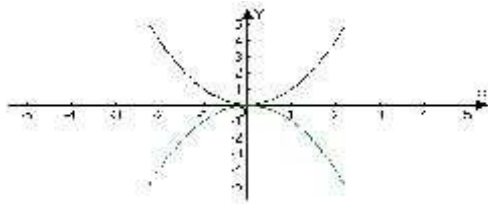
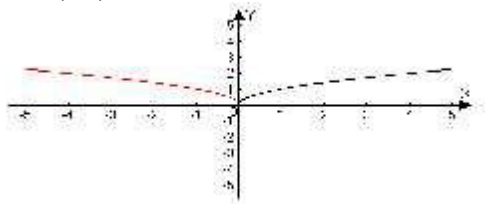
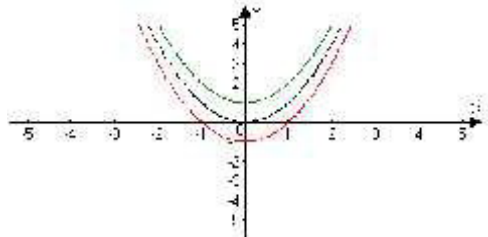
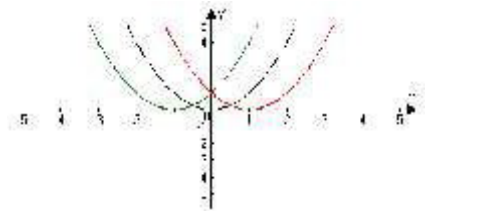
Функция	Аргумент α												
	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
$\arcsin \alpha$	$-$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	####	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	####	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-$
$\arccos \alpha$	$-$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	####	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	####	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-$
$\operatorname{arctg} \alpha$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	####	####	$\frac{\pi}{6}$	####	0	####	$\frac{\pi}{6}$	####	####	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arctctg} \alpha$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	####	####	$\frac{2\pi}{3}$	####	$\frac{\pi}{2}$	####	$\frac{\pi}{3}$	####	####	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

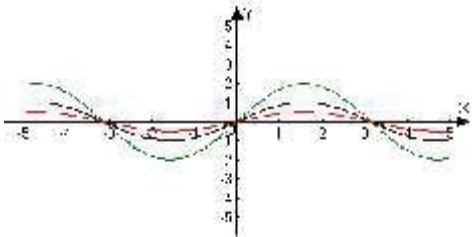
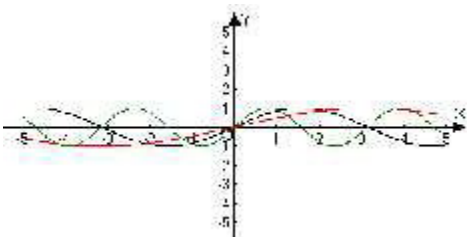
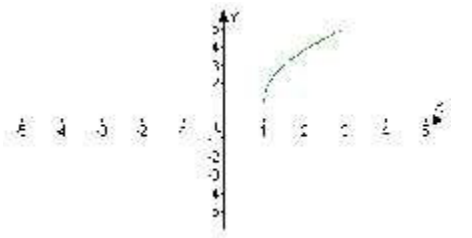
Например: $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$

Значком «####» обозначены «плохие» углы, которые можно вычислить приближённо с помощью калькулятора, например:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,71 \text{ радиан.}$$

Преобразования графиков

№	Функция	Преобразование	Графики
1	$y = -f(x)$	Сначала строим график функции $f(x)$, а затем симметрично отображаем его относительно оси ОХ.	$y = -(x^2)$  $y = x^2 \rightarrow -(x^2)$
2	$y = f(-x)$	Сначала строим график функции $f(x)$, а затем симметрично отображаем его относительно оси ОУ.	$y = \sqrt{-x}$  $y = \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{-x}$
3	$y = f(x) + A$ $A - \text{const}$	Сначала строим график функции $f(x)$, а затем, если $A > 0$ поднимаем полученный график на A единиц вверх по оси ОУ. Если $A < 0$, то опускаем вниз.	$y = x^2 \rightarrow x^2 + 1$  $y = x^2 \rightarrow x^2 - 1$
4	$y = f(x - a)$	Сначала строим график функции $f(x)$, а затем, если $a > 0$, то график функции смещаем на a единиц вправо, а если $a < 0$, то на a единиц влево. "-" — → "+" — ←	$y = x^2 \rightarrow (x + 1)^2$  $y = x^2 \rightarrow (x - 1)^2$

5	$y = K f(x)$ $k - \text{const}$ $k > 0$	<p>Сначала строим график функции $f(x)$, а затем, если $K > 0$, то растягиваем полученный график в K раз вдоль оси OY. А если $0 < K < 1$, то сжимаем полученный график в $1/K$ раз вдоль оси OY.</p> <p>↑↓ ↑</p>	$y = \sin(x) \rightarrow 2\sin(x)$ $y = \sin(x) \rightarrow S \sin(x)$ 
6 7	$y = f(kx)$ $k - \text{const}$ $k > 0$ $y = A f(kx + a) + B$ $A, k, a, B - \text{const}$	<p>Сначала строим график функции $f(x)$, а затем, если $k > 1$, то сжимаем полученный график в k раз вдоль оси OX. А если $0 < k < 1$, то растягиваем полученный график в $1/k$ раз вдоль оси OX.</p> <p>$k > 1 \rightarrow \leftarrow$ $0 < k < 1 \rightarrow \leftarrow \rightarrow$</p> <p>$f(x) \rightarrow f(kx) \rightarrow f(k(x + a/k)) \rightarrow A f(k(x + a/k)) + B$</p>	$y = \sin(x) \rightarrow \sin(2x)$ $y = \sin(x) \rightarrow \sin(Sx)$  $y = 2\sqrt{(2x-2)+1}$ $y = \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{2x} \rightarrow \sqrt{2(x-1)} \rightarrow 2\sqrt{2(x-1)} \rightarrow 2\sqrt{2(x-1)}+1$ 

Основы тригонометрии

Краткий справочный материя по теме	Примеры решения типовых заданий
<p>Формулы сложения:</p> $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$	<p>1) $\sin(20^\circ + 30^\circ)$ $= \sin 20^\circ \cos 30^\circ + \cos 20^\circ \sin 30^\circ$ $= \sin 20^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2}$</p> <p>2) $\sin\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right) = \sin \frac{n}{2} \cdot \cos \frac{n}{2} - \cos \frac{n}{2} \cdot \sin \frac{n}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$</p> <p>3) $\operatorname{tg}\left(\frac{n}{6} - \frac{n}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{n}{6} - \operatorname{tg} \frac{n}{3}}{1 + \operatorname{tg} \frac{n}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{n}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{5}$</p> <p>4) $\cos 62^\circ \cdot \cos 28^\circ = \sin 62^\circ \cdot \sin 28^\circ = \cos 90^\circ = 0$</p> <p>5) $\sin 112^\circ \cdot \cos 22^\circ - \cos 112^\circ \cdot \sin 22^\circ = \sin 90^\circ = 1$</p>
<p>Преобразование суммы в произведение:</p> $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$	<p>1) $\sin 76^\circ + \sin 14^\circ = 2 \sin \frac{76^\circ + 14^\circ}{2} \cdot \cos \frac{76^\circ - 14^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 31^\circ = 2 \cos 31^\circ$</p> <p>2) $\cos 64^\circ + \cos 26^\circ = 2 \cos \frac{64^\circ + 26^\circ}{2} \cdot \cos \frac{64^\circ - 26^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 19^\circ = 2 \cos 19^\circ$</p> <p>3) $\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{\sin(70^\circ + 20^\circ)}{\cos 70^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ \cdot \cos 20^\circ}$</p>

Формулы приведения:

Функция	Аргумент $\beta =$							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \beta =$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \beta =$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta =$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta =$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Примеры использования таблицы:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

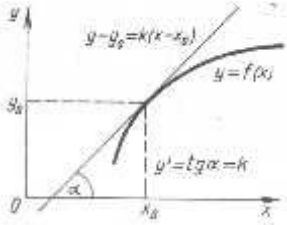
Приложение № 7.

Элементы комбинаторики

Тип комбинаций	Примеры решения типовых заданий
<p>1. Перестановки</p> <p>Возьмем n различных элементов: А, В, С, ... М; будем переставлять эти элементы всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя лишь их порядок.</p> <p>Каждая из таких комбинаций называется перестановкой.</p> <p>P – число всех перестановок; n – количество элементов. $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ <i>Читаем: $n!$ – эн факториал</i></p>	<p>1. Найти число перестановок из трех элементов А, В, С. <i>Решение:</i> Выпишем возможные варианты перестановок: АВС ВАС САВ АСВ ВСА СВА. Проверим по формуле: $n = 3$; $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ <i>Ответ:</i> 6 перестановок.</p> <p>2. Найти число перестановок из трех элементов: 1, 2, 3. <i>Решение:</i> выпишем возможные варианты перестановок: 123 213 312 132 231 321. Всего получилось 6 перестановок. Проверим по формуле: $n = 3$; $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ <i>Ответ:</i> 6 перестановок.</p> <p>3. Сколькими способами можно расставить на полке 6 различных книг: <i>Решение:</i> $n = 6$; $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ <i>Ответ:</i> 720 различных вариантов.</p>
Тип комбинаций	Примеры решения типовых заданий
<p>2. Размещения</p> <p>Будем составлять из n различных элементов в каждой, располагая взятые m элементов в различном порядке. Каждая группа из m элементов называется размещением из n элементов по m элементов.</p> <p>A – число всех размещений; n – количество <u>всех</u> элементов; m – количество элементов <u>в группе</u>.</p> $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	<p>1. Найдите число размещений из трех элементов: 7, 4, 5 по два. <i>Решение:</i> выпишем возможные варианты: 74, 75, 47, 45, 57, 54 – всего 6 различных групп по 2 элемента. Проверим по формуле: $n = 3$; $m = 2$ $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ <i>Ответ:</i> 6 размещений.</p> <p>2. Найдите число размещений из четырех элементов: А, В, С, D по два. <i>Решение:</i> $n = 4$, $m = 2$ $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 3 \cdot 4 = 12$ <i>Ответ:</i> 12 размещений</p> <p>3. Из 10 студентов группы на p выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими</p>

	<p>способами это можно сделать?</p> <p><u>Решение:</u> $n = 10$; $m = 3$</p> $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$ <p><u>Ответ:</u> 720 способами.</p>
<p>Сочетания</p> <p>Из n различных элементов будем составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимание на порядок, но так, чтобы число элементов не повторялось (в сочетаниях АВ и ВА считаются эквивалентными)</p> <p>Любая группа из n элементов по m элементов в каждой (различными считаются те, которые имеют неодинаковый состав элементов) называется сочетанием.</p> <p>C – число сочетаний</p> <p>n – количество <u>всех</u> элементов</p> <p>m – количество элементов <u>в группе</u></p> $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	<p>1. Найдите все сочетания из трех элементов: 7, 4, 5 по два элемента в каждом.</p> <p><u>Решение:</u> Выпишем группы по 2 элемента (но 47 и 74 – эквиваленты(одинаковые) группы): 74, 75, 45. Всего – 3 группы, т.е. 3 сочетания. Проверим по формуле:</p> $n = 3, m = 2; C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ <p><u>Ответ:</u> 3 сочетания.</p> <p>2. Найдите все сочетания из пяти элементов: А,В,С,Д,Е по три в каждом.</p> <p><u>Решение:</u> $n = 5, m = 3; C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$</p> <p><u>Ответ:</u> 10 сочетаний.</p> <p>3. Сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трех человек?</p> <p><u>Решение:</u> $n = 6, m = 3; C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$</p> <p><u>Ответ:</u> 20 способов.</p>

Производная, применение производной

<u>Пределы.</u>	<u>Геометрический смысл производной</u>
<ol style="list-style-type: none"> $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0;$ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, если $q < 1;$ $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C;$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0;$ <p>Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$, то</p> <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b + c;$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n * y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n * \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b * c;$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n / y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b / c;$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = kb;$ 	 <p>$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$</p> <p>Если к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(x_0)$ выражает угловой коэффициент касательной.</p>
	<p><u>Физический (механический) смысл производной</u></p> <p>Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t. Производная от скорости по времени является ускорением.</p> <p>$y = f(x)$ $f'(x_0) = v$ (скорость) $f''(x_0) = v' = a$ (ускорение)</p>

Формулы производных.

- $C' = 0$
 - $x' = 1$
 - $(kx + m)' = k$
 - $(x^2)' = 2x$
 - $(1/x)' = 1/x^2 u u' v - u v'$
 - $(x^n)' = n x^{n-1}$
 - $(\sin x)' = \cos x$
 - $(\cos x)' = -\sin x$
 - $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$
 - $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$
 - $(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$
 - $(Cu)' = C * u'$
- $y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$

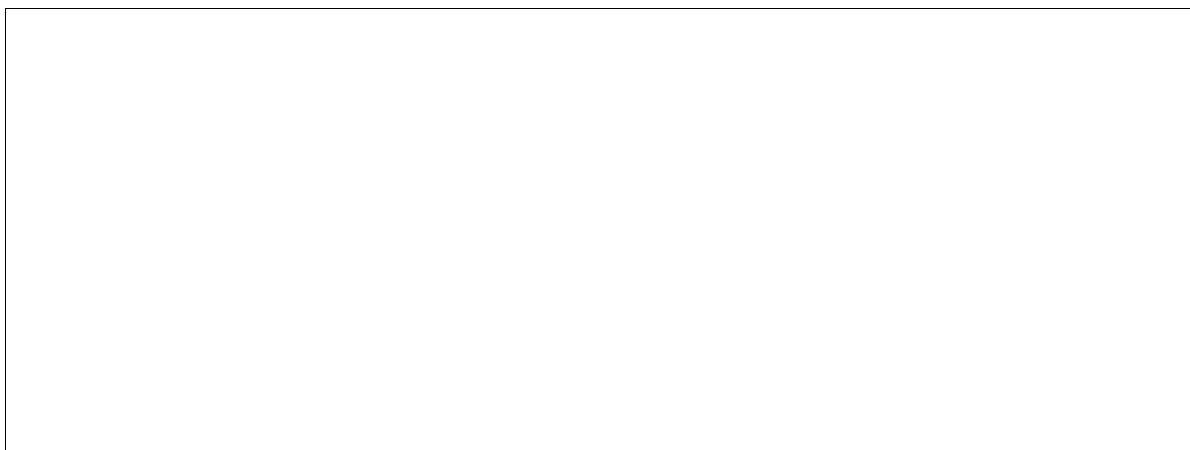
Правила дифференцирования

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u * v)' = u'v + uv'$
- $\frac{u}{v}' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

v^2

Сложная функция: $f'(q(x)) = f'(q) * q'(x)$

Уравнение касательной



Применение производной				
Монотонность	Точки экстремума	Экстремумы функции	График функции	Наибольшее и наименьшее значение функции на $[a; b]$
1.D 2. Стационарные точки: y' , $y' = 0$. 3. Критические точки. 4. Знаки y' . 5. <u>Ответ:</u> промежутки возрастания, убывания.	1.D 2. Стационарные точки: y' , $y' = 0$. 3. Критические точки. 4. Знаки y' . 5. Промежутки возрастания, убывания. 6. <u>Ответ:</u> x_{\max} , x_{\min}	1.D 2. Стационарные точки: y' , $y' = 0$. 3. Критические точки. 4. Знаки y' . 5. Промежутки возрастания, убывания. 6. Точки экстремума: x_{\max} , x_{\min} . 7. <u>Ответ:</u> $y(x_{\max})$, $y(x_{\min})$	1.D 2. Стационарные точки: y' , $y' = 0$. 3. Критические точки. 4. Знаки y' . 5. Промежутки возрастания, убывания. 6. Точки экстремума: x_{\max} , x_{\min} . 7. Экстремумы Функции: $y(x_{\max})$, $y(x_{\min})$ 8. Доп точки. 9. График.	1.D 2. Стационарные и критические точки, лежащие внутри $[a; b]$. 3. Вычислить значение функции в точках п.2 и в концах $[a; b]$ 4. Ответ: выбрать наиб или наим значение ф-ции

Приложение № 9

Первообразная, интеграл

1. Функцию F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка выполнено: $F'(x) = f(x)$
2. Общий вид первообразных.

Если F -первообразная для функции f , то $F+C$ (где $C = \text{const}$), также является первообразной для f .

$f(x)$	$F(x)$
$kf(x)$	$kF(x)$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$
C	Cx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

$f(x)$	$F(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg}(x)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{ctg}(x)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

3. Формула Ньютона-Лейбница.
 $ABCD$ -криволинейная трапеция.
 S -площадь криволинейной трапеции.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x)$$

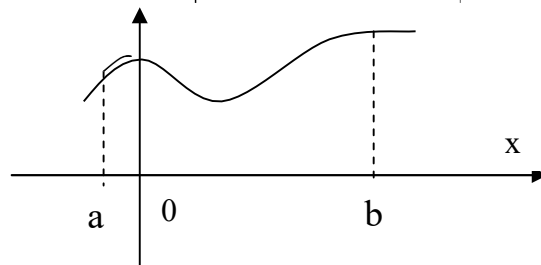
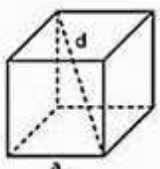
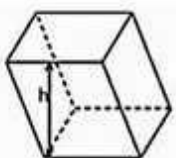
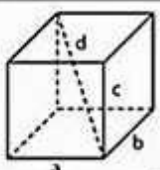
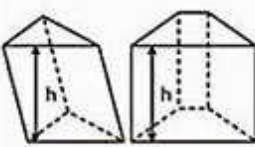
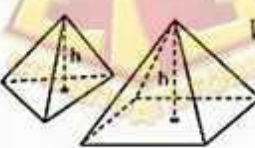


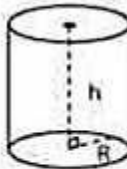
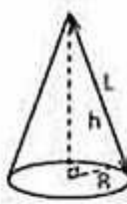
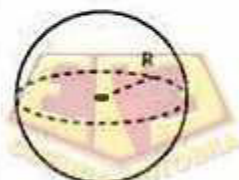
Таблица основных интегралов:		Основные св-ва неопределённого интеграла:
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C (a \neq -1)$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	1. Производная неопр. интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопр. интеграла равен подынтегр.
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$	

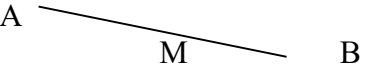
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$	выражению, т.е.
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ и } d \int f(x) dx = f(x) dx$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + k} \right + C$	2. Неопр. интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:
$\int e^x dx = e^x + C,$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$	$\int dF(x) = F(x) + C.$
$\int \sin x dx = -\cos x + C,$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$	3. Постоянный множитель можно вынести из-под знака интеграла, т.е. если $k = \text{const}$, то
		$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$
		4. Неопр. интеграл от алгебраической суммы 2-х функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т.е.
		$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Многогранники

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 $V = a^3$ a – ребро куба куб	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ параллелепипед	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$ $S_{\text{осн}}$ – площадь основания h – высота
 $V = a \cdot b \cdot c$ прямоугольный параллелепипед	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 $V = S_{\text{осн}} \cdot h$ призма	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$ $S_{\text{осн}}$ – площадь основания h – высота
 $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ пирамида	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$

Тела вращения

ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 <p>цилиндр</p> $V = \pi R^2 h$ <p>R – радиус основания h – высота</p>	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi R h$
 <p>конус</p> $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi R^2 + \pi R L$ <p>L – образующая</p> $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 <p>шар</p> $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

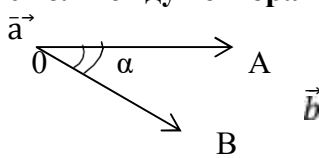
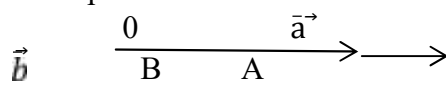
 <p> $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ Длину отрезка АВ находим по формуле: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ Точка М – середина отрезка АВ. Координаты середины отрезка находим по формуле : $M(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2})$ </p>	<p>Найдите длину отрезка АВ и координаты середины отрезка АВ, если $A(3; -4; 0)$; $B(-1; 2; 4)$.</p> <p><u>Решение:</u></p> $AB = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - (-4))^2 + (4 - 0)^2}$ $= \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 36 + 16} = \sqrt{68} - \text{длина отрезка АВ.}$ $M(\frac{3 + (-1)}{2}; \frac{-4 + 2}{2}; \frac{0 + 4}{2})$ $M(1; -1; 2) - \text{координаты середины отрезка АВ.}$
---	--

Приложение №12

Координаты и векторы

Произвольная точка А в пространстве характеризуется тремя числами: абсциссой х, ординатой у, аппликатой z, что записывается так: $A(x; y; z)$ – координаты точки.

<p>Вектор – направленный отрезок. Обозначают: \overrightarrow{AB} или \vec{a}</p> <p>$\xrightarrow[A]{\vec{a}} B$</p> <p>A – начало вектора, B – конец вектора</p> <p>Длиной вектора называют длину соответствующего ему отрезка.</p> <p>Записывают так: $\overrightarrow{AB} = AB$</p> <p>Вектор называется нулевым, если его начало совпадает с концом</p> <p>$\overrightarrow{AA}, \vec{0}$ – нулевые векторы</p>	
<p>Координаты вектора:</p> <p>$\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$</p> <p>$\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$</p>	<p>Найдите координаты вектора \overrightarrow{AB}, если A (5;-6;3), B (-2;0;7).</p> <p><u>Решение:</u> $\overrightarrow{AB} (-2-5; 0-(-6); 7-3)$</p> <p>$\overrightarrow{AB} (-7; 6; 4)$ – координаты вектора \overrightarrow{AB}</p>
<p>Длина вектора:</p> <p>$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$</p> <p>$\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$</p>	<p>1. Найдите длину вектора \overrightarrow{AB}, если A (5;-6;3), B (-2;0;7).</p> <p><u>Решение:</u> $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-2-5)^2 + (0-(-6))^2 + (7-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 36 + 16} = \sqrt{101}$ – длина вектора \overrightarrow{AB}</p> <p>2. Найдите длину вектора $\vec{a} (1; -3; 2)$.</p> <p><u>Решение:</u> $\vec{a} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{15}$</p>

<p>Угол между векторами</p>  <p>α – угол между \vec{a} и \vec{b}</p>	<p>1. Если $\alpha = 0^\circ \Rightarrow$ векторы \vec{a} и \vec{b} – сонаправленные</p>  <p>2. Если $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – векторы перпендикулярные</p>
<p>Скалярное произведение векторов:</p> <p>$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \alpha$</p> <p>$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$</p> <p>$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$</p>	<p>1. Найдите скалярное произведение векторов, если $\vec{a} (2; 8; -4)$, $\vec{b} (0; 1; -3)$.</p> <p><u>Решение:</u> $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) = 0 + 8 + 12 = 20$</p> <p>2. Найдите скалярное произведение векторов, если угол между ними равен 90°.</p> <p><u>Решение:</u> Т.к. $\alpha = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos 90^\circ = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot 0 = 0$</p> <p>3. Докажите, что векторы взаимно перпендикулярны, если $\vec{a} (-4; -8; -14)$, $\vec{b} (2; -6; -4)$</p> <p><u>Решение:</u> $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 2 + 8 \cdot (-6) +$</p>

	$(-14) \cdot (-4) = 0$ Т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ $\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
--	---

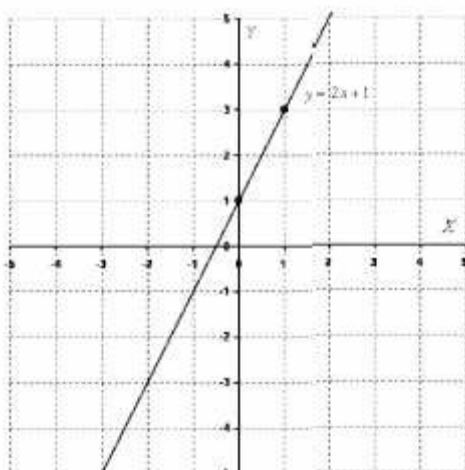
Приложение №13

Графики функций

1) График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y = ax + b$. График линейной функции представляет собой **прямую**. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.

Пример 1 Построить график функции $y = 2x + 1$. Найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать ноль. При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:



x	0	1
y	1	3

При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Частные случаи линейной функции:

1) Линейная функция вида $y = ax$ ($a \neq 0$) называется прямой пропорциональностью.

$$y = -\frac{x}{2}$$

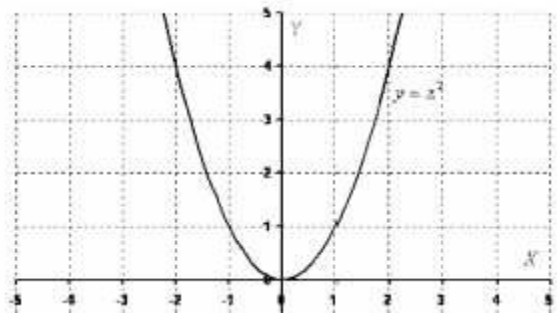
Например, $y = -\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

2) Уравнение вида $y = c$ задает прямую, параллельную оси Ox , в частности, сама ось Ox задается уравнением $y = 0$. График функции строится сразу, без нахождения всяких точек. То есть, запись $y = -4$ следует понимать так: «игрек всегда равен -4 , при любом значении икс».

3) Уравнение вида $x = c$ задает прямую, параллельную оси Oy , в частности, сама ось Oy задается уравнением $x = 0$. График функции также строится сразу. Запись $x = 1$ следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1 ».

2) График квадратичной, кубической функции, график многочлена

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим знаменитый случай: $y = x^2$



Свойства функции $y = x^2$.

Область определения – любое действительное число (любое значение «икс»)
 $D(f) = \mathbb{R}$.

Область значений – это множество всех значений, которые может принимать переменная «игрек». В данном случае: $E(f) = [0; +\infty)$ – множество всех

положительных значений, включая ноль. Область значений стандартно обозначается через $E(f)$ или $E(f)$.

Функция $y = x^2$ является **чётной**, т.к. $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Если функция является **чётной**, то ее график симметричен относительно оси Oy . $f(-x) = f(x)$.

Пример 2

Построить график функции $f(x) = -x^2 + 2x$.

Находим вершину параболы. Для этого берём первую производную и приравниваем ее к нулю:

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2 = 0$$

Рассчитываем соответствующее значение «игрек»:

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

Таким образом, вершина находится в точке $(1; 1)$.

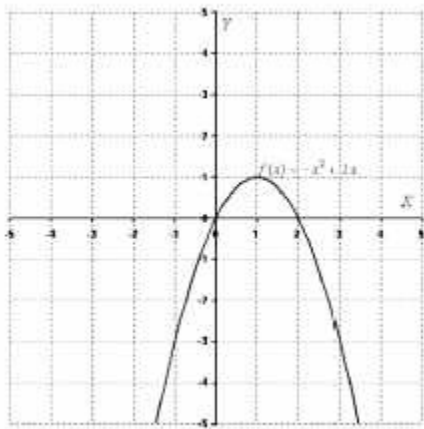
Теперь находим другие точки, при этом нагло пользуемся симметричностью параболы.

Следует заметить, что функция $f(x) = -x^2 + 2x$ – **не является чётной**, но, тем не менее, симметричность параболы никто не отменял.

В каком порядке находить остальные точки, думаю, будет понятно из итоговой таблицы:

x	1	0	2	-1	3	-2	4
y	1	0	0	-3	-3	-8	-8

Выполним чертёж:



Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее:

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

3) Кубическая параболa

Кубическая параболa задается функцией $y = x^3$.

Перечислим основные свойства функции $y = x^3$

Область определения – любое действительное число: $D(f) = \mathbb{R}$.

Область значений – любое действительное число: $E(f) = \mathbb{R}$.

Функция $y = x^3$ является **нечётной**. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат. Аналитически нечётность функции выражается условием

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	8	-8

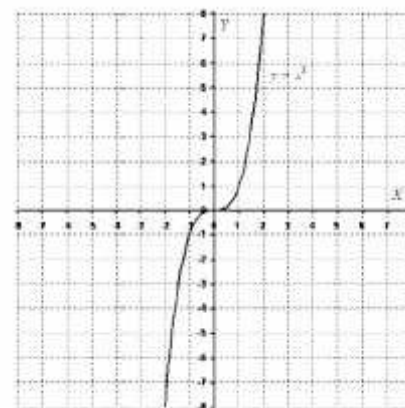
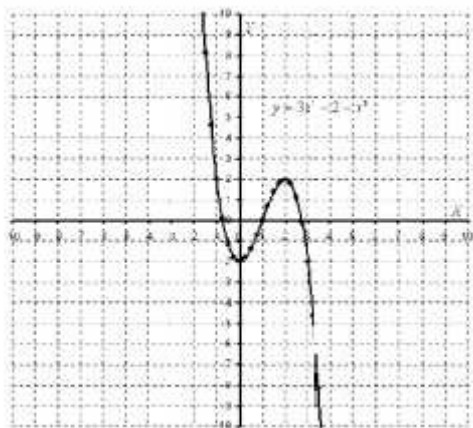
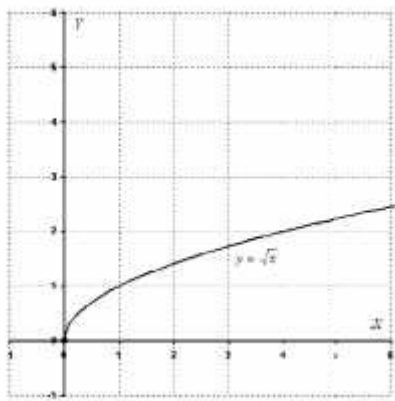


График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) имеет следующий вид:



4) График функции $y = \sqrt{x}$

Он представляет собой одну из ветвей **параболы**.



Основные свойства функции $y = \sqrt{x}$:

Область определения: $D(f) = [0; +\infty)$.

Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$.

То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти.

Функция $y = \sqrt{x}$ не ограничена сверху.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

5) Обратная пропорциональность $y = k/x$

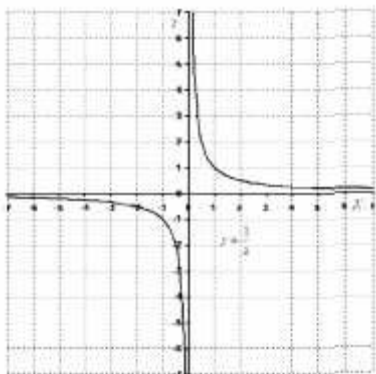


График функции вида $y = k/x$ представляет собой две ветви гиперболы.

Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях (см. рисунок выше).

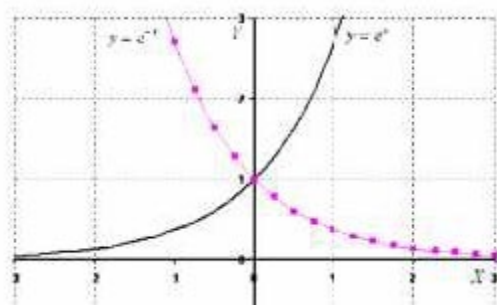
Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

6) График показательной функции $y = e^x$,

e – это иррациональное число: $e \approx 2,71828...$

x	-1	0	1
y	$e^{-1} \approx 0,37$	1	$e \approx 2,72$

Основные свойства функции $y = e^x$:



Область определения: $D(f) = \mathbb{R}$ – любое «икс».

Область значений: $E(f) = (0; +\infty)$. Обратите внимание, что ноль не включается в область значений.

Экспонента – функция **положительная**, то есть для **любого** «икс» справедливо неравенство $y = e^x > 0$, а сам график экспоненты полностью расположен в верхней полуплоскости.

Принципиально такой же вид имеет любая показательная функция $y = a^x$, если $a > 1$. Функции $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ будут отличаться только крутизной наклона графика, причем, чем больше основание, тем круче будет график.

Обратите внимание, что во всех случаях графики проходят через точку $(0, 1)$, то есть

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$$

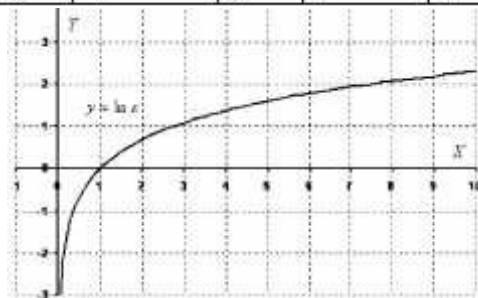
Основание $0 < a < 1$. Снова пример с экспонентой – на чертеже соответствующий график прочерчен малиновым цветом. Принципиально так же выглядят графики функций

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}, \quad y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = 7^{-x} \quad \text{и т. д.}$$

7) График логарифмической функции

Рассмотрим функцию с натуральным логарифмом $y = \ln x$. Выполним поточечный чертеж:

x	$e^{-1} \approx 0,37$	1	$e \approx 2,72$	$e^2 \approx 7,39$
y	-1	0	1	2



Основные свойства функции $y = \ln x$:

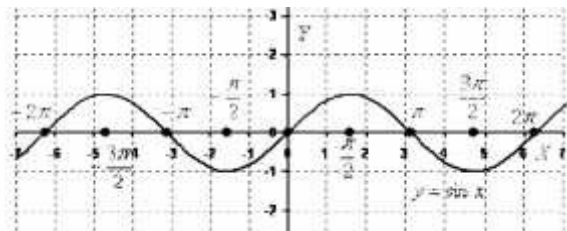
Область определения: $D(f) = (0; +\infty)$

Область значений: $E(f) = \mathbb{R}$.

Экспоненциальная функция $y = e^x$ и логарифмическая функция $y = \ln x$ – это две взаимно обратные функции.

8) Графики тригонометрических функций

График функции $y = \sin x$



Данная линия называется *синусоидой*.

Основные свойства функции $y = \sin x$:

- Данная функция является **периодической** с периодом 2π .

Область определения: $D(f) = \mathbb{R}$, то есть

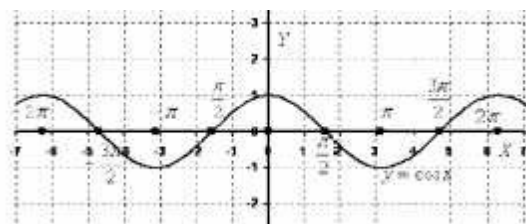
для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: $E(f) = [-1; 1]$. Функция $y = \sin x$

является **ограниченной**: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

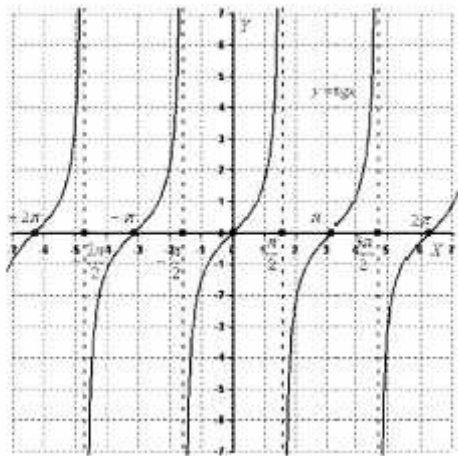
Синус – это функция **нечетная**, синусоида симметрична относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x) = -\sin x$.

График функции $y = \cos x$



Косинус – это функция **четная**, ее график симметричен относительно оси OY , и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$.

График функции $y = \tan x$



Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

Данная функция является **периодической** с периодом π .

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

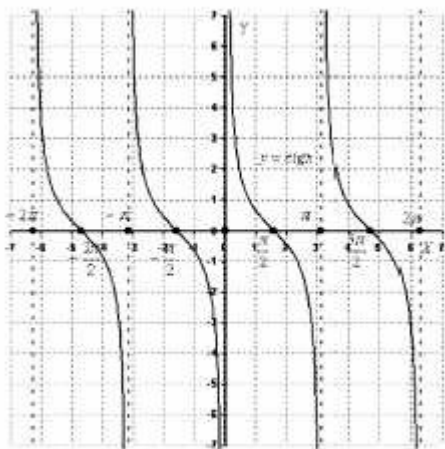
Область определения:

Область значений: $E(f) = \mathbb{R}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ **не ограничена**.

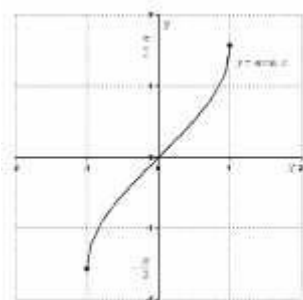
Тангенс – **функция нечетная**, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$



Графики обратных тригонометрических функций

$y = \arcsin x$



Перечислим основные свойства функции $y = \arcsin x$:

Область определения: $D(f) = [-1; 1]$, не существует значений вроде $\arcsin(-1.2)$ или $\arcsin 2$

Область значений: $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть, функция $y = \arcsin x$ **ограничена**.

Арксинус – **функция нечетная**, здесь минус опять же выносится: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

График арккосинуса $y = \arccos x$

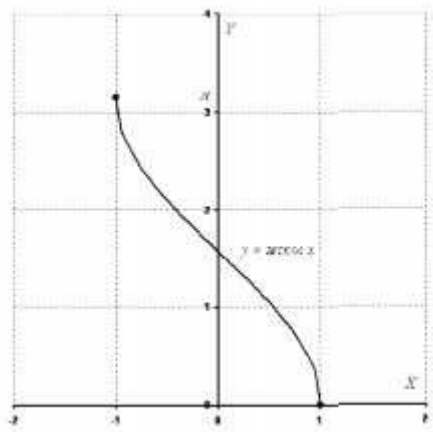
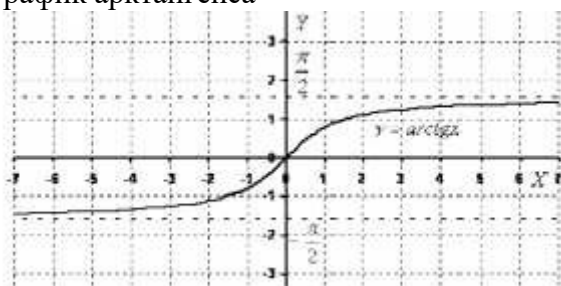


График арктангенса $y = \arctg x$



Перечислим основные свойства функции $y = \arctg x$:

Область определения: $D(f) = \mathbb{R}$

Область значений: $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть, функция $y = \arctg x$ ограничена.

У рассматриваемой функции есть две асимптоты: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctg x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\arctg x) = -\frac{\pi}{2}$.

Арктангенс – функция нечетная: $\arctg(-x) = -\arctg x$.

График арккотангенса $y = \operatorname{arccotg} x$

